

ОСОБЛИВОСТІ ПОСТАНОВКИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ СПРЯЖЕНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В АГРАРНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

У статті розглянуто особливості застосування теорії двоїстих задач лінійного програмування у сільськогосподарському виробництві із урахуванням екологічної та економічної складових. Наводяться приклади розв'язання задач з використанням звичайного симплекс-методу та М-методу, економічна інтерпретація розв'язків та відповідність між змінними прямої і спряженої задачі.

Постановка проблеми. Із самого початку розвитку математичного апарату постало питання про його застосування у різних галузях науки і техніки та сферах людської діяльності. Особливої ефективності було досягнуто при використанні математичного моделювання в аграрному виробництві. Зокрема, урахування при постановці задачі екологічної та економічної складових має надзвичайно важливий вплив на життєдіяльність людини, якість продукції та стан складових агроєкосистеми.

Ефективність управління в агропромисловому комплексі у значній мірі передбачає прийняття господарських рішень в умовах деякої невизначеності, обумовленої такими основними причинами: випадковий характер протікання природних процесів; неоднорідність живих систем, які беруть участь у виробничих процесах; асиметричність ринкової інформації. У зв'язку з цим, збереження конкурентоспроможності галузі, підприємств АПК вимагає прийняття оптимального рішення та формування сучасної системи управління. Застосування сучасних технологій дозволяє у повному об'ємі розв'язувати поставлені задачі [1].

Поширеною методикою опису тих чи інших як виробничих, економічних, так і екологічних процесів та явищ служить моделювання. Модель конструється суб'єктом дослідження таким чином, щоб операції відображали характеристики об'єкта, істотні для мети дослідження. Змістом методу моделювання є конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта і виділення його істотних характеристик, після чого слідує експериментальний і теоретичний аналіз розробленої моделі, зіставлення отриманих результатів з даними об'єкта, корегування моделі [2].

До важливих задач, які розв'язуються шляхом моделювання досліджуваних процесів та явищ, що відбуваються в агроєкосистемах, належать отримання, обробка, накопичення, упорядкування та використання меліоративно-екологічної та агроєкологічної інформації на основі сучасної науково-обґрунтованої методології із застосуванням принципів системного аналізу та засобів сучасних інформаційних технологій [3].

Аналіз основних досліджень та публікацій, в яких започатковано розв'язання проблеми. Для ефективно побудови моделей в агроєкології доцільно використовувати двоїстий симплекс-метод. Він був запроваджений ще в 1954 році американським вченим Г. Лемке. Пізніше з'ясувалося, що він практично співпадає з запропонованим значно раніше Л.В. Канторовичем методом дозволяючих множників [4]. Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають *спряженою (двоїстою)* стосовно вихідної задачі. Цільова функція та обмеження спряженої задачі повністю визначаються умовами вихідної задачі [5].

Вихідна та спряжена задачі утворюють пару взаємно спряжених задач, тому будь-яку з них можна розглядати як вихідну (першу, початкову). Теорія дослідження спряженості дозволяє суттєво розширити коло задач лінійного програмування, які являють як теоретичний, так і практичний інтерес [6].

Мета досліджень. Розробка методології використання математичного апарату спряжених задач до розв'язання практичних задач сільськогосподарського виробництва за умов обмеженості природних та ресурсів та необхідності збереження екологічної ситуації регіону.

Результати досліджень. У загальному випадку в аграрному виробництві постановка пари двоїстих (спряжених) задач виглядає наступним чином [5]. Сільськогосподарське підприємство у виробництві використовує m видів ресурсів, обсяги яких обмежені величинами $b_1, b_2, \dots, b_m$, та може виробляти n найменувань продукції, обсяги яких позначимо $x_1, x_2, \dots, x_n$. Відомими є обсяги витрат i -го виду ресурсу на одиницю продукції j -го найменування a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), відомий і прибуток c_j від реалізації одиниці продукції j -го найменування [5].

Задача 1. Визначити такий план виробництва продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який дав би можливість одержати найбільший прибуток від реалізації за умови, що затрати ресурсів не можуть перевищувати їх відомих обсягів.

Математична модель задачі формулюється так:

$$\text{знайти найбільше значення функції} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1)$$

$$\text{за умов} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Спряжена задача за тих же вихідних економічних даних може бути сформульована так.

Задача 2. При яких можливих вартостях y_i одиниць i -их ресурсів виробництво продукції буде збитковим, тобто недоцільним, за модельованих економічних умов?

Якщо обсяги ресурсів необхідно придбати в кількості $b_1, b_2, \dots, b_m$ при найменших витратах, то математична модель задачі 2 формулюється так:

$$\text{знайти найменше значення функції} \quad Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \quad (4)$$

$$\text{за умов} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6)$$

($\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ – обсяг витрат на виробництво одиниці продукції j -го найменування, (5) – умова, що витрати на одиницю продукції не менші, ніж прибуток від реалізації).

Задачі 1 і 2 утворюють пару спряжених (двоїстих) задач, і кожна з них може бути розглянута як вихідна. У задачі 2 цільова функція (4) визначає витрати підприємства на закупівлю ресурсів за цінами $y_1, y_2, \dots, y_m$, а нерівності (5) віддзеркалюють умову, що коли прибуток від реалізації одиниці продукції j -го найменування не перевищуватиме витрати ресурсів на її виробництво, то виробляти за таких умов продукцію недоцільно.

Співставивши математичні моделі сформульованих задач та абстрагуючись від їх конкретного змісту, слід наголосити на таких їх особливостях [5]:

- 1) кількість невідомих в одній із задач дорівнює кількості основних обмежень іншої задачі;
- 2) матриці коефіцієнтів систем обмежень транспоновані одна відносно іншої;
- 3) знаки операцій відношень в обмеженнях (2) та (5) є протилежними;
- 4) коефіцієнти цільової функції однієї із задач є вільними членами в обмеженнях-нерівностях іншої задачі;
- 5) у спряжених задачах досліджуються екстремальні властивості протилежного сенсу.

Проаналізуємо математичні моделі спряжених задач у загальному випадку (табл.1) [5].

Формалізація певної виробничої ситуації може бути зведена як до пари симетричних двоїстих задач, так і несиметричних. *Симетричні* – це задачі, в яких обмеження визначаються лише нерівностями. Змінні в спряжених задачах цього класу невід’ємні. *Несиметричні* – це задачі, в яких обмеження можуть бути визначені як нерівностями, так і рівностями. Доцільно наголосити, що в задачах цього класу стосовно змінних спряженої задачі відсутня умова їх невід’ємності. Надалі будемо розглядати лише спряжені симетричні задачі.

Для того, щоб знайти відповідність між змінними спряжених симетричних задач (1) – (3) та (4) – (6),

необхідно записати їх у канонічній формі. Для вихідної задачі (1) – (3) введемо допоміжні змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, для спряженої – $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$.

Таблиця 1

Загальний вигляд спряжених задач

$Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$ $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$ $\dots$ $a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$ $Z_{\max} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ або $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$	$Z_{\min} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ $a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$ $a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$ $\dots$ $a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$ $Z_{\min} = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ або $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$
---	---

Задачі сформулюються так:

Вихідна:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7)$$

$$x_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, n+m}) \quad (8)$$

$$Z = \sum_{k=1}^{n+m} c_k x_k \rightarrow \max \quad (9)$$

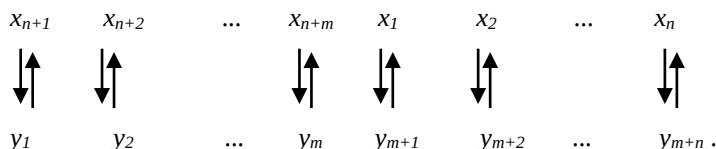
Спряжена:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (10)$$

$$y_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, m+n}) \quad (11)$$

$$Z = \sum_{k=1}^{m+n} b_k y_k \rightarrow \min \quad (12)$$

У системах обмежень (8) та (11) кількість змінних однакова і дорівнює $n+m$. Базисними змінними в системі (7) – (9) будуть змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, а у спряженій задачі (10) – (12) $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$. Між змінними спряжених задач існує взаємовідповідність:



Взаємозв'язок між спряженими задачами (1) – (3) і (4) – (6) та коефіцієнтами при змінних можна схематично представити так:

	x_1	x_2	...	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...			...		...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	...	c_n	

У симплекс-таблиці цей взаємозв'язок можна представити так:

			Базис	y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+n}
	i	Базис	B_i	c_1	c_2	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_n
y_1	1	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
y_2	2	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	m	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
	$m+1$	Z_j	$Z_{\max}$	індексний рядок			

Значення базисних змінних вихідної задачі визначаються в стовпці B_i , а значення базисних змінних спряженої задачі – в індексному рядку. Тобто, розв'язавши одну із спряжених задач, та зваживши на відповід-

ність між їх змінними, одержують розв'язок іншої спряженої задачі.

Економічний зміст оптимальних планів спряжених задач. Спряжені задачі різних лінійних математичних моделей практичних задач мають різний зміст [5]. Розв'язання вихідної задачі планування обсягів виробництва продукції за певних економічних умов дозволяє одержати оптимальний план, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації сільськогосподарської продукції, а розв'язок спряженої задачі – визначити розміри граничних цін на ресурси: якщо ціни ресурсів їх досягають, то відсутня доцільність виробництва. У спряженій задачі додатні оцінки впливу змінних на величину цільової функції матимуть лише ті ресурси, які повністю використовуються за оптимального плану. Оцінки, які відповідають ресурсам, що не використовуються в повному обсязі, завжди матимуть нульові значення.

Якщо деяка j -та змінна вихідної задачі в оптимальному плані має додатне значення, то відповідне обмеження за оптимального плану спряженої задачі буде виконуватись як рівність. За умови, що j -та змінна вихідної задачі в оптимальному плані має нульове значення, то за оптимального плану спряженої задачі відповідне обмеження буде, як правило, жорсткою нерівністю.

Величина спряженої оцінки певного ресурсу показує, як змінилося б найбільше значення цільової функції вихідної задачі за умови приросту ресурсу на одиницю. Але необхідно наголосити, що розглядається лінійна математична модель, практична доцільність використання якої завжди обмежена певними межами зміни величин, використаних при розбудові моделі, тому спряжені оцінки дають можливість оцінити ефект впливу за порівняно невеликих приростів обсягів ресурсів. За суттєво значних змін обсягів ресурсів такі оцінки можуть не мати практичного сенсу. Як частковий випадок розв'язання двоїстої пари задач лінійного програмування розглянемо наступну задачу сільськогосподарського виробництва.

Приклад (пряма задача). Для фермерського господарства необхідно визначити оптимальне поєднання площі висіву пшениці ярої та цукрових буряків так, щоб забезпечити максимум прибутку на основі такої інформації: для висіву зазначених культур відведено 280 га ріллі; витрати праці на 1 га посіву пшениці плануються 3,5 людино-днів, цукрових буряків – 40 людино-днів, а загальні трудові ресурси не повинні перевищувати 4800 людино-днів; згідно технології на 1 га посіву пшениці слід внести 1,2 ц, на 1 га посіву цукрових буряків – 7,5 ц мінеральних добрив, загальні ж запаси цих добрив становлять 84 тонни. Прибуток з 1 га пшениці ярої планується 390 грн., цукрових буряків – 1520 грн.

Розв'язання.

Позначивши через x_1 та x_2 (га) шукані площі відповідно пшениці ярої та цукрових буряків, запишемо цільову функцію – максимум прибутку:

$$Z_{\max} = 390x_1 + 1520x_2.$$

Умови використання ресурсів (ріллі, трудових ресурсів та мінеральних добрив) визначаються системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 280, \\ 3,5x_1 + 40x_2 \leq 4800, \\ 1,2x_1 + 7,5x_2 \leq 840, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Спряжену задачу можна сформулювати так: знайти такі значення умовних оцінок землі, трудових ресурсів і мінеральних добрив y_1, y_2, y_3 , які б мінімізувати вартість виробничих ресурсів.

Математична модель спряженої задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} F_{\min} = 280y_1 + 4800y_2 + 840y_3 \\ y_1 + 3,5y_2 + 1,2y_3 \geq 390, \\ y_1 + 40y_2 + 7,5y_3 \geq 1520, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Умову (13) зведемо до канонічного вигляду та, використовуючи симплекс-метод, знайдемо оптимальний план (табл. 2).

Канонічний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 280 \\ 3,5x_1 + 40x_2 + x_4 = 4800 \\ 1,2x_1 + 7,5x_2 + x_5 = 840 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 390x_1 + 1520x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Таблиця 2

Блок симплекс-таблиць розв'язання задачі з визначення оптимального плану посіву пшениці ярої та цукрових буряків

i	B	C_j	B_i	390	1520	0	0	0	b_i/a_{ij}^*
		C_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	280	1	1	1	0	0	280
2	x_4	0	4800	3,5	40	0	1	0	120
3	x_5	0	840	1,2	7,5	0	0	1	112
$m+1$	Z_j		0	-390	-1520	0	0	0	
← 1	x_3	0	168	0,84	0	1	0	-0,13	200
2	x_4	0	320	-2,9	0	0	1	-5,33	
→ 3	x_2	1520	112	0,16	1	0	0	0,13	700
$m+1$	Z_j		170240	-146,8	0	0	0	202,67	
→ 1	x_1	390	200	1	0	1,19	0	-0,16	
2	x_4	0	900	0	0	3,45	1	-5,79	
3	x_2	1520	80	0	1	-0,19	0	0,16	
$m+1$	Z_j		199600	0	0	174,76	0	179,37	

Досягнутий план вихідної задачі (200, 80, 0, 900, 0) є оптимальним, оскільки в рядку $m+1$ відсутні від'ємні оцінки, і єдиним. Значення цільової функції – $Z_{\max}=199600$.

Скориставшись відповідністю змінних спряжених задач, маємо:

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(значення змінних)} \\ \text{(значення двоїстих оцінок)} \end{array}$$

Тобто, оптимальний план спряженої задачі визначається за оцінками змінних (значення, що стоять в індексному $(m+1)$ рядку останньої СТ).

$$y = (174,76; 0; 179,37; 0; 0).$$

За такого плану величина цільової функції $F_{\min}$ дорівнює:

$$F_{\min} = 280 \cdot 174,76 + 4800 \cdot 0 + 840 \cdot 179,37 = 199600$$

Оцінка трудових ресурсів дорівнює нулю, що свідчить про використання їх не в повному обсязі. Оцінки земельних ресурсів і мінеральних добрив, які використовуються, додатні, що свідчить про їх використання в повному обсязі за оптимального плану виробництва.

Система обмежень (13) вихідної задачі за оптимального плану:

$$\begin{cases} 200 + 80 = 280, \\ 3,5 \cdot 200 + 40 \cdot 80 < 4800, \\ 1,2 \cdot 200 + 7,5 \cdot 80 = 840. \end{cases}$$

Аналіз обмежень свідчить, що земельні ресурси і мінеральні добрива використовуються в повному обсязі, а трудові ресурси – не повністю (залишається резерв 900 людино-днів).

Система обмежень (14) спряженої задачі при оптимальному плані має вигляд:

$$\begin{cases} 174,76 + 3,5 \cdot 0 + 1,2 \cdot 179,37 = 390 \\ 174,76 + 40 \cdot 0 + 7,5 \cdot 179,37 = 1520. \end{cases}$$

Тобто обмеження виконуються як рівності.

Проаналізуємо розв'язок прямої задачі оптимального розподілу посівних площ із використанням ре-

зультатів оптимального плану спряженої задачі. Збільшення на один гектар земельних ресурсів, відведених фермерським господарством під яру пшеницю і цукрові буряки, дозволило б збільшити прибуток на 174,76 грн.; збільшення на 1 ц кількості мінеральних добрив, що вносяться під вищеназвані культури, дозволило б збільшити прибуток на 179,37 грн. Збільшення ж кількості використаних трудових ресурсів на величину прибутку не впливатиме, оскільки вони використовуються при оптимальному плані не повністю.

Оптимальний план для спряженої задачі дає можливість оцінити вплив кожного виду необхідного ресурсу на величину прибутку. Найбільший вплив має той вид ресурсу, який відповідає найбільшій компоненті оптимального плану спряженої задачі. У розглянутому прикладі – це третій вид ресурсу – мінеральні добрива.

У свою чергу, розв'язавши задачу (14), ми можемо впевнитися у правильності зроблених висновків.

Канонічна форма:

$$\begin{cases} y_1 + 3,5y_2 + 1,2y_3 - y_4 = 390 \\ y_1 + 40y_2 + 7,5y_3 - y_5 = 1520 \\ F_{min} = 280y_1 + 4800y_2 + 840y_3 + 0y_4 + 0y_5. \end{cases}$$

Введемо штучні змінні:

$$\begin{cases} y_1 + 3,5y_2 + 1,2y_3 - y_4 + V_1 = 390 \\ y_1 + 40y_2 + 7,5y_3 - y_5 + V_2 = 1520 \\ F_{min} = 280y_1 + 4800y_2 + 840y_3 + 0y_4 + 0y_5 + MV_1 + MV_2. \end{cases}$$

Розрахунок наведемо у ряді симплекс таблиць (таблиця 3) за алгоритмом симплекс-методу зі штучним базисом (М-методу).

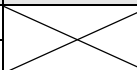
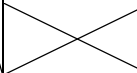
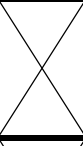
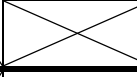
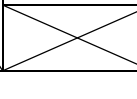
Очевидно, що остання (четверта) симплекс-таблиця задовольняє умові оптимальності.

Отриманий розв'язок співпадає із розв'язком прямої задачі.

Наведений приклад показує, що розв'язок спряженої задачі дає можливість ґрунтовніше висвітлити економічний сенс вихідної задачі.

Таблиця 3

Блок симплекс-таблиць розв'язання задачі, що є спряженою до задачі з визначення оптимального плану посіву пшениці ярої та цукрових буряків

i	B	C_j C_i	B_i	280 y_1	4800 y_2	840 y_3	0 y_4	0 y_5	M V_1	M V_2	b_i/a_{ij}^*
1	V_1	M	390	1	3,5	1,2	-1	0	1	0	111,43
2	V_2	M	1520	1	40	7,5	0	-1	0	1	38
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-280	-4800	-840	0	0	0	0	
$m+2$			1910M	2M	43,5M	8,7M	-M	-M	0	0	
1	V_1	M	257	0,91	0	0,54	-1	0,09	1		281,64
2	y_2	4800	38	0,03	1	0,19	0	-0,03	0		1520
$m+1$	$Z_j - C_j$		182400	-160	0	60	0	-120	0		
$m+2$			257M	0,91M	0	0,54M	-M	0,09M	0		
1	y_1	280	281,64	1	0	0,6	-1,1	0,1			472,64
2	y_2	4800	30,96	0	1	0,17	0,03	-0,03		179,37	
$m+1$	$Z_j - C_j$		227463,01	0	0	155,34	-175,34	-104,66			
$m+2$			0	0	0	0	0	0			
1	y_1	280	174,76	1	-3,45	0	-1,19	0,19			
2	y_3	840	179,37	0	5,79	1	0,16	-0,16			
$m+1$	$Z_j - C_j$		199600	0	-900	0	-200	-80			
$m+2$			0	0	0	0	0	0			

Висновки. Отже, математичний апарат спряжених задач можна ефективно використовувати для агро-екологічного виробництва. Економічна та екологічна інтерпретації прямих та двоїстих їм задач полегшує знаходження оптимального плану виробництва сільськогосподарської продукції.

Література

1. Тарасов А.Н., Дунаев В.Л. Модель развития перерабатывающей промышленности в региональных АПК. // Аграрная наука. – 2004. – № 2. – С. 13 – 15.
2. Черемис А., Юринець Р., Мицишин О. Методи оптимізації в економіці. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.
3. Попович И.В. Методика экономических исследований в сельском хозяйстве. – М.: Экономика, 1982.
4. Бирман И.Я. Оптимальное программирование. – М.: Экономика, 1968.
5. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Харків: Вид-во Харківського державного аграрного університету ім. В.В. Докучаєва, 2002.
6. Калініченко А.В., Костоглод К.Д., Протас Н.М. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва: Навчальний посібник для студентів вищих аграрних закладів освіти. – Полтава: ІнтерГрафіка, 2004. – 104 с.