

А. В. Антонець, Л. О. Флегантов, Ю. І. Овсієнко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти
інженерних, технічних та технологічних спеціальностей**

ПОЛТАВА 2022

УДК 51(075.8)
А 72

Автори

- Антонець А.В.** кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавського державного аграрного університету
- Флегантов Л.О.** кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавського державного аграрного університету
- Овсієнко Ю.І.** кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавського державного аграрного університету

Рецензенти

- Мельник В.І.** академік Академії наук вищої освіти України, доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка
- Барболіна Т.М.** доктор фізико-математичних наук, доцент, декан фізико-математичного факультету Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка
- Гірко В.Л.** доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики, інформатики та методики навчання Університету Григорія Сковороди в Переяславі

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Полтавського державного аграрного університету (протокол № 8 від 23 грудня 2021 р.)

Антонець А.В., Флегантов Л.О., Овсієнко Ю.І. Вища математика : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти інженерних, технічних та технологічних спеціальностей. Полтава : Копі-Прінт, 2022. 208 с.

Навчальний посібник містить теоретичні положення, практичні завдання та методичні вказівки по їх виконанню з основних розділів курсу «Вища математика». Кожна тема містить основний теоретичний матеріал, практичні завдання та контрольні запитання. Теорія супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Окрему увагу приділено методиці виконання практичних завдань. У посібнику розглянуто питання з основних розділів вищої математики таких як векторна алгебра та аналітична геометрія; диференціальне й інтегральне числення; кратні інтеграли; функції багатьох змінних; диференціальні рівняння та ряди.

Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти інженерних, технічних та технологічних спеціальностей, зокрема повністю відповідає змісту навчальної програми дисципліни «Вища математика» для спеціальностей 208 Агроінженерія та 133 Галузеве машинобудування.



ISBN 978-966-97995-0-0

© Колектив авторів, 2022

Вид-во Копі-Прінт, Полтава, 2022

ТЕМА № 1. ВИЗНАЧНИКИ, МАТРИЦІ

1.1. Поняття про визначники

Поняття про визначник II порядку

Означення. Визначником другого порядку називається числовий або буквений вираз, спочатку записаний у вигляді квадратної таблиці із двох рядків та двох стовпців, що дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

де $a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22}$ – елементи визначника, елементи $a_{11}; a_{22}$ лежать на головній діагоналі визначника, відповідно елементи $a_{12}; a_{21}$ утворюють побічну діагональ.

Визначник III порядку

Означення. Визначником III-го порядку називається числовий або буквений вираз, спочатку записаний у вигляді квадратної таблиці із трьох рядків та трьох стовпців, що дорівнює:

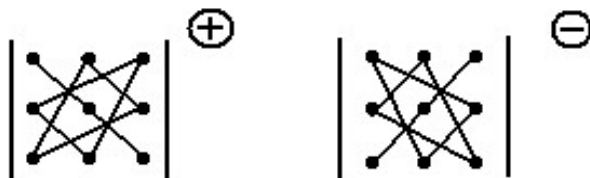
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Для знаходження визначників *третього* порядку використовують: правило трикутників, правило Пікара, теорему Лапласа (універсальний метод).

Для знаходження визначників III-го порядку за допомогою правила трикутників використовують наступний алгоритм.

Зі знаком «+» беруть добутки елементів, що лежать на головній діагоналі, а також добутки елементів, що стоять на вершинах трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі.

Зі знаком «-» знаходять добутки елементів, що стоять на побічній діагоналі, а також добутки елементів, що лежать на вершинах трикутників основи яких паралельні до побічної діагоналі.



Приклад. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-3) = 18$$

Знаходження визначника III-го порядку за допомогою правила Пікара: для початку справа від визначником записують два його перші стовпці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Зі знаком «+» знаходять добутки елементів, що лежать на головній діагоналі, а також добутки елементів, які стоять на двох інших прямих паралельних до головної діагоналі; зі знаком «-» беруть добутки елементів, що стоять на побічній діагоналі, а також добутки елементів, що лежать на двох інших прямих паралельних до побічної діагоналі. Отримуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Визначник n-го порядку

Нехай дано квадратну таблицю (1), що містить n^2 елементів, що розміщені в n рядках і n стовпцях, де i – номер рядка, j – номер стовпця.

Означення. Визначником n -го порядку називається числовий або буквенний вираз, спочатку записаний у вигляді квадратної таблиці із n рядків та n стовпців, що дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2. Властивості визначників. Мінори і алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа та її наслідки

Властивості визначників

Знаходження визначників четвертого і вищих порядків можна спростити звівши до знаходження визначників II-го і III-го порядків за допомогою використання властивостей визначників.

1. Якщо рядки замінити на стовпці або навпаки, то визначник не зміниться.

2. Визначник змінить свій знак, якщо поміняти місцями два його довільних рядки або стовпці.

3. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи довільного рядка або стовпця є нулі.

ЗМІСТ

ТЕМА № 1. ВИЗНАЧНИКИ, МАТРИЦІ	3
1.2. <i>Поняття про визначники.</i>	3
1.3. <i>Властивості визначників. Мінори і алгебраїчні доповнення</i>	
1.4. <i>Теорема Лапласа та її наслідки.</i>	4
1.5. <i>Поняття про матрицю. Види матриць</i>	5
1.6. <i>Дії над матрицями. Обернена матриця</i>	7
1.7. <i>Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.</i>	8
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ №1	10
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	12
ТЕМА № 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	13
2.1. <i>Поняття про СЛАР та її розв'язки</i>	13
2.2. <i>Правило Крамера розв'язування системи n рівнянь з</i> <i>n невідомими</i>	13
2.3. <i>Матричний метод розв'язування систем n лінійних</i> <i>рівнянь з n невідомими.</i>	15
2.4. <i>Сумісність СЛАР. Теорема Кронекера-Капеллі.</i>	16
2.5. <i>Метод Гауса.</i>	17
2.6. <i>Класифікація систем за кількістю розв'язків.</i>	18
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ №2	19
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	20
ТЕМА № 3. ВЕКТОРИ.....	21
3.1. <i>Геометричні вектори та дії з ними</i>	21
3.2. <i>Скалярний добуток двох векторів та його властивості</i>	23
3.3. <i>Векторний добуток двох векторів та його властивості</i>	25
3.4. <i>Мішаний добуток трьох векторів, його властивості,</i> <i>геометричний зміст, застосування</i>	26
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 3	28
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	29
ТЕМА № 4. ПРЯМА І ПЛОЩИНА.....	30
4.1. <i>Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої.</i> <i>Дослідження неповного рівняння прямо</i>	30
4.2. <i>Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричні і</i> <i>канонічні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить</i> <i>через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.</i>	31
4.3. <i>Кут між двома прямими на площині. Умова</i> <i>паралельності та перпендикулярності прямих.</i>	33
4.4. <i>Площина як поверхня першого порядку. Загальне рівняння</i> <i>площини. Дослідження неповного рівняння площини. Види</i> <i>рівнянь площини</i>	34
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 4	36
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	37
ТЕМА № 5. КРИВІ II ПОРЯДКУ	38
5.1. <i>Поняття про криву II порядку. Коло</i>	38
5.2. <i>Еліпс.</i>	38
5.3. <i>Гіпербола.</i>	40

5.4. Парабола.....	41
5.5. Геометрична і механічна спорідненості кривих другого порядку.....	42
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 5	43
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	44
ТЕМА № 6. МНОЖИНИ ТА ФУНКЦІЇ. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ..	45
6.1. Множини, дії над множинами	45
6.2. Поняття функції. Способи завдання функції.....	47
6.3. Властивості функцій	48
6.4. Основні елементарні функції.....	49
6.5. Елементарні функції та їх класифікація	50
6.6. Числова послідовність	51
6.7. Поняття про границю числової послідовності	52
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 6	54
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	55
ТЕМА № 7. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ	56
7.1. Границя функції та її властивості	56
7.2. Границя функції на нескінченності. Нескінченні границі. Границя функції на нескінченності.....	57
7.3. Поняття про неперервність функції. Точки розриву.....	59
7.4. Обчислення границь. Розкриття невизначеностей	62
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 7	65
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	66
ТЕМА № 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	67
8.1. Похідна.....	67
8.2. Диференціювання функцій	67
8.3. Диференціал.....	69
8.4. Теорема про диференційовані функції.....	71
8.5. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей	71
8.6. Похідні вищих порядків	72
8.7. Частинні похідні I і II порядку. Повний диференціал.....	73
8.8. Екстремуми функцій двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в заданій замкненій області.....	74
8.9. Метод найменших квадратів	76
8.10. Похідна за напрямом. Градієнт	77
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 8	79
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	81
ТЕМА № 9. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ	82
9.1. Дослідження функції за допомогою I похідної	82
9.2. Дослідження функції за допомогою II похідної.....	84
9.3. Асимптоти	85
9.4. Загальна схема дослідження функцій та побудова графіків.....	86
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 9	86
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	87
ТЕМА № 10. ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ	88
10.1. Первісна та її властивості	88

10.2. Невизначений інтеграл та його властивості	89
10.3. Методи інтегрування	90
10.4. Інтегрування раціональних дробів.....	95
10.5. Інтегрування ірраціональних виразів та тригонометричних функцій	100
10.6. Інтегрування тригонометричних функцій	104
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 10	107
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	108
ТЕМА № 11. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	109
11.1. Визначений інтеграл та його властивості	109
11.2. Застосування визначеного інтеграла.....	111
11.3. Невласні інтеграли	115
11.4. Наближене обчислення визначених інтегралів.....	116
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 11	118
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	120
ТЕМА № 12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	121
12.1. Поняття про диференціальні рівняння і його розв'язки	121
12.2. Диференціальні рівняння I-го порядку	122
12.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами	130
12.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами	132
12.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	136
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 12	141
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	143
ТЕМА № 13. РЯДИ.	144
13.1 Поняття про числовий ряд	144
13.2. Додатні числові ряди. Ознаки збіжності.....	147
13.3. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца	150
13.4. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності.....	151
13.5. Поняття про функціональний ряд	152
13.6. Степеневі ряди	154
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ПО ТЕМІ № 13	159
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	161
МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ	162
Елементи лінійної алгебри	162
Елементи аналітичної геометрії	167
Вступ до диференціального числення	179
Диференціальне числення функції однієї змінної.....	184
Інтегральне числення функції однієї змінної	192
Диференціальні рівняння.....	198
Числові ряди	202
ЗМІСТ	204

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

АНТОНЕЦЬ Анатолій Вікторович

ФЛЕГАНТОВ Леонід Олексійович

ОВСІЄНКО Юлія Іванівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Віддруковано ФОП Петренко І. М.
36000, м. Полтава, вул. Шевченка, 27

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи ДК №7006 від 12.12.2019

Підписано до друку 25.12.2021 р.
Формат 60х90/16. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 13. Наклад 500 прим.
Зам. №1