

**АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ТА ЛОКАЛІЗОВАНИХ
НАВАНТАЖЕНЬ БРУСІВ ІЗ КРИВОЛІНІЙНОЮ ПЛОСКОЮ ВІССЮ****Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень****Ковальчук С.Б.**, к.т.н.,

stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4550-431X

Горик О.В., д.т.н., професор,*Полтавська державна аграрна академія*

oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580

Анотація. Робота присвячена проблемі аналітичного моделювання ідеалізованих зосереджених (сила, момент) та локалізованих на ділянці поверхні навантажень, для брусів із криволінійною плоскою віссю довільної форми у природній системі координат. У першій частині висвітлено математичне обґрунтування аналітичного моделювання сил та моментів, зосереджених у точці поздовжньої циліндричної або торцевої поверхні криволінійного бруса. Загальні аналітичні співвідношення для моделювання зосереджених навантажень отримані із використанням елементів теорії узагальнених функцій. Наведені приклади конкретизації отриманих співвідношень у окремих випадках брусів із круговою, еліптичною і параболічною віссю.

Ключові слова: криволінійний брус, зосереджена сила, зосереджений момент, природна система координат, узагальнена функція.

Введення. Застосування аналітичних методів розв'язання задач механіки деформування стержневих елементів часто зводиться до розв'язання визначальних диференціальних рівнянь, права частина яких містить функцію розподілу зовнішнього навантаження або внутрішніх силових факторів. У випадку коли навантаження розподілене по всій поверхні стержня і може бути описане неперервною функцією в усіх її точках, отримання частинних розв'язків визначальних диференціальних рівнянь, якщо відома фундаментальна система розв'язків, не складає значної проблеми. Якщо ж навантаження діє локально на окремій частині поверхні, або зосереджене в окремих її точках, його розподіл має розриви і розв'язання рівнянь потребує розбиття області визначення рівняння на розрахункові ділянки, в межах яких права частина безперервна, із подальшим узгодженням сталих інтегрування розв'язків на межах розділу ділянок. Інший підхід полягає у застосуванні узагальнених функцій [1, 2], таких як функція Хевісайда та Дірака, які дозволяють аналітично описати розподіл розривних та імпульсних навантажень і отримати розв'язок визначального рівняння відразу для всього стержня. Основною перевагою другого підходу є зменшення кількості невідомих сталих інтегрування та можливість отримання єдиного виразу для шуканої компоненти напружено-деформованого стану (НДС), замість сукупності виразів для окремих ділянок.

Застосування узагальнених функцій для описання зосереджених та локалізованих навантажень при розв'язанні диференціального рівняння деформованої осі в задачах згину прямих балок започатковане у [3] і пізніше розвинуто у ряді робіт [4-8]. Про ефективність даного підходу свідчить значна кількість наукових праць присвячених різним задачам згину однорідних і неоднорідних балок із розривними навантаженнями, закріпленнями та жорсткістю [9-18]. Використання узагальнених функцій у механіці деформування, також значною мірою пов'язане із розвитком методу граничних елементів [19, 20].

У попередніх роботах авторами запропоноване застосування природної системи координат [21] для розв'язання задач механіки деформування однорідних та неоднорідних брусів із криволінійною плоскою віссю довільної форми [22]. Пізніше, у роботі [23] були отримані інтегральні та диференціальні співвідношення, що пов'язують внутрішні силові фактори та зовнішнє навантаження, у вигляді функцій розподілу їх інтенсивності, на ділянці такого бру-

са. Одним із наступних кроків для розвитку розробленого у даних роботах теоретичного апарату, без якого суттєво звужується коло його прикладного застосування, є вирішення проблеми аналітичного моделювання зосереджених і локалізованих навантажень. Однак безпосереднє перенесення підходів до моделювання таких навантажень від прямолінійних брусів до криволінійних буде некоректним, тому зазначена проблема потребує окремого дослідження, а її вирішення має супроводжуватись належним математичним обґрунтуванням.

Мета та завдання. Метою дослідження є отримання загальних співвідношень для аналітичного моделювання зосереджених та локалізованих навантажень криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми у природній для його будови криволінійній системі координат. Основним завданням, яке необхідно вирішити для досягнення поставленої мети, є встановлення зв'язку між ідеалізованим зосередженим навантаженням та еквівалентним розподіленим навантаженням із відповідним математичним обґрунтуванням.

Матеріали та методика дослідження. Розглянемо криволінійний брус із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат $H\Xi Y$ [21]. У такій системі координат поздовжні поверхні Π_ζ ($\zeta = 1, 2$) розглядуваного бруса разом із усіма його поздовжніми волокнами належать до однопараметричного сімейства координатних циліндричних поверхонь Π_ξ^g , а торцеві поверхні T_ζ разом із усіма поперечними перерізами – до однопараметричного сімейства координатних циліндричних поверхонь T_η^f . Проекції поверхонь Π_ξ^g та T_η^f на координатну площину XOZ допоміжної прямокутної системи координат XYZ складають однопараметричні сімейства кривих (рис. 1, а), відповідно:

$$g_\xi(x, z, \xi) = 0, \quad f_\eta(x, z, \eta) = 0, \quad (1)$$

де η, ξ – довільні дійсні сталі (параметри сімейств кривих).

Зв'язок між координатами довільної точки $K(x, y, z)$ у допоміжній системі XYZ та координатами точки $K(\eta, \xi, y)$ у природній криволінійній системі $H\Xi Y$:

$$x = \omega_x(\eta, \xi), \quad y = y, \quad z = \omega_z(\eta, \xi). \quad (2)$$

Вирази для диференціала дуги на довільних кривих сімейств g_ξ та f_η :

$$ds_\xi = L_\xi d\eta, \quad ds_\eta = L_\eta d\xi, \quad (3)$$

де L_ξ, L_η – коефіцієнти Ламе системи координат $H\Xi Y$:

$$L_\eta = \sqrt{1 + \kappa^2} |\partial \omega_z / \partial \eta|, \quad L_\xi = \sqrt{1 + \kappa^2} |\partial \omega_x / \partial \xi|, \quad \kappa = \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} = - \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} / \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Необхідно відмітити, що в (4) α є кутом між дотичною до кривої f_η (проекція поперечного перерізу на XOZ) та додатним напрямом осі OX і в загальному випадку є функцією двох змінних: $\alpha = \alpha(\eta, \xi)$ (рис. 1, а).

Розглянемо теоретичні передумови аналітичного моделювання в природній системі координат $H\Xi Y$ зосереджених сил моментів та локалізованих розподілених навантажень, що прикладені до поверхонь криволінійного бруса.

Моделювання зосередженої сили. Спочатку розглянемо випадок зосередженої нормальної сили F_ξ (рис. 1, а), прикладеної у точці поздовжньої верхньої поверхні Π_2 , що належить площині XOZ і поперечному перерізу з координатою $\eta_F \in (\eta_1, \eta_2)$. Моделюючи таке навантаження, замінимо зосереджену силу F_ξ зведеним до площини XOZ нормальним погонним навантаженням $q_\xi^{\Pi_2}(\eta, \eta_F)$, що розподілене за деяким законом уздовж кривої g_{ξ_2} (рис. 1, б) і має рівнодійну R_ξ :

$$R_\xi = F_\xi. \quad (5)$$

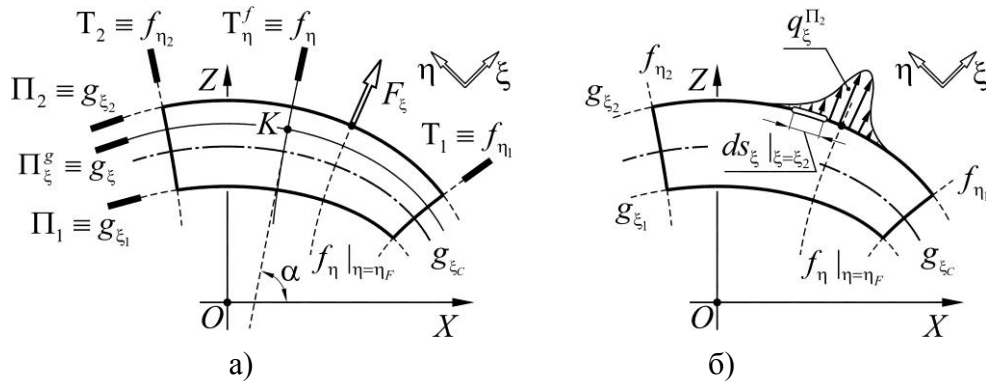


Рис. 1. Моделювання зосередженої сили

Функцію навантаження $q_{\xi}^{\Pi_2}$, представимо, як добуток двох функцій (рис. 2):

$$q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_F) = q(\eta) p(\eta - \eta_F, \varepsilon), \quad (6)$$

де ε – додатна стала, мала порівняно з величиною проміжку $[\eta_1, \eta_2]$.

Загалом, функції q та p мають задовольняти лише умову безперервності на проміжку $[\eta_1, \eta_2]$.

Однак від q будемо також вимагати:

$$q|_{\eta=\eta_F} = \mu F_{\xi}, \quad (7)$$

де μ – деяка стала величина.

Від функції p окремо вимагатимемо:

$$p = 0 \forall \eta \notin [\eta_F - \varepsilon, \eta_F + \varepsilon], \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\psi, \varepsilon) d\eta = 1, \quad (9)$$

де $\psi = \eta - \eta_F$ – відносна координата.

На кривій g_{ξ_2} (рис. 1, б) виділимо елемент дуги довжиною $ds_{\xi}|_{\xi=\xi_2}$, на який діє частина навантаження $q_{\xi}^{\Pi_2}$ із рівнодійною dR_{ξ} . Проекції dR_x та dR_z рівнодійної dR_{ξ} на осі допоміжної системи XOZ із урахуванням (3) дорівнюватимуть:

$$dR_x = q_{\xi}^{\Pi_2} \cos \alpha|_{\xi=\xi_2} L_{\eta}|_{\xi=\xi_2} d\eta, \quad dR_z = q_{\xi}^{\Pi_2} \sin \alpha|_{\xi=\xi_2} L_{\eta}|_{\xi=\xi_2} d\eta. \quad (10)$$

Інтегруючи (10) у межах проміжку $[\eta_1, \eta_2]$ отримаємо проекції рівнодійної всього навантаження прикладеного на даній ділянці:

$$R_x = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \cos \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta, \quad R_z = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \sin \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta. \quad (11)$$

Величину рівнодійної отримаємо як геометричну суму виразів (11):

$$R_{\xi} = \sqrt{\left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \cos \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta \right)^2 + \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \sin \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta \right)^2}. \quad (12)$$

Підставивши до першого інтеграла в (12) співвідношення (6) і застосувавши теорему про середнє, із урахуванням (8) та (9) отримаємо:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \cos \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta = \int_{\eta_F - \varepsilon}^{\eta_F + \varepsilon} (L_{\eta} q(\eta) p(\eta - \eta_F, \varepsilon) \cos \alpha)|_{\xi=\xi_2} d\eta = \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 &= (L_{\eta} q(\eta) p(\eta - \eta_F, \varepsilon) \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_m, \xi=\xi_2} ((\eta_F + \varepsilon) - (\eta_F - \varepsilon)) = \\
 &= (L_{\eta} q(\eta) \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_m, \xi=\xi_2} \int_{\eta_F - \varepsilon}^{\eta_F + \varepsilon} p(\eta - \eta_F, \varepsilon) \big|_{\xi=\xi_2} d\eta = (L_{\eta} q(\eta) \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_m, \xi=\xi_2},
 \end{aligned}$$

де $\eta_m \in (\eta_F - \varepsilon, \eta_F + \varepsilon)$.

Аналогічно для другого інтеграла в (12):

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \sin \alpha) \big|_{\xi=\xi_2} d\eta = (L_{\eta} q(\eta) \sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_m, \xi=\xi_2}. \quad (14)$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то: $\eta_m \rightarrow \eta_F$. Тоді (13) і (14) з урахуванням (7):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \cos \alpha) \big|_{\xi=\xi_2} d\eta &= (q(\eta) L_{\eta} \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2} = \mu F_{\xi} (L_{\eta} \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}, \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (L_{\eta} q_{\xi}^{\Pi_2} \sin \alpha) \big|_{\xi=\xi_2} d\eta &= (q(\eta) L_{\eta} \sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2} = \mu F_{\xi} (L_{\eta} \sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Таким чином, згідно (15) у граничному випадку, при $\varepsilon \rightarrow 0$, можна записати:

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta_1}^{\eta_2} ((L_{\eta} \cos \alpha) \big|_{\xi=\xi_2} q(\eta) p(\eta - \eta_F, 0)) d\eta &= (q(\eta) L_{\eta} \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}, \\
 \int_{\eta_1}^{\eta_2} ((L_{\eta} \sin \alpha) \big|_{\xi=\xi_2} q(\eta) p(\eta - \eta_F, 0)) d\eta &= (q(\eta) L_{\eta} \sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Вирази (16) є лінійними функціоналами, які за визначенням є функціями Дірака [2], зміщеними відносно початку відліку, причому:

$$p(\eta - \eta_F, 0) = \Delta(\eta - \eta_F). \quad (17)$$

Для встановлення значення коефіцієнта μ підставимо (15) до (12):

$$\begin{aligned}
 R_{\xi} &= \sqrt{(\mu F_{\xi} (L_{\eta} \cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2})^2 + (\mu F_{\xi} (L_{\eta} \sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2})^2} = \\
 &= \mu F_{\xi} L_{\eta} \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2} \sqrt{((\cos \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2})^2 + ((\sin \alpha) \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2})^2} = \mu F_{\xi} L_{\eta} \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2},
 \end{aligned}$$

звідки з урахуванням (5):

$$\mu = 1/L_{\eta} \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}. \quad (18)$$

Оскільки функція q була обрана довільно, то будь-яка функція, яка задовольняє умову (7) може бути використана для запису (6), зокрема, із урахуванням (18):

$$q(\eta) = F_{\xi} / L_{\eta} \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2} = \text{const}. \quad (19)$$

Тоді відповідно до (6), (17) та (19) навантаження $q_{\xi}^{\Pi_2}$, може бути записане у вигляді:

$$q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_F) = F_{\xi} / L_{\eta} \big|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2} \Delta(\eta - \eta_F). \quad (20)$$

Моделювання зосередженого моменту. Розглянемо випадок, коли у точці поздовжньої поверхні Π_2 криволінійного бруса, що належить перерізу з координатою $\eta_m \in (\eta_1, \eta_2)$, діє зосереджений момент із інтенсивністю M (рис. 3, а). Співвідношення для аналітичного моделювання такого навантаження отримаємо на основі співвідношення (20) для моделювання нормальної сили. Для цього зосереджений момент M наближено представимо, як пару зосереджених сил F_{ξ} , одна з яких прикладена у точці перерізу η_m , а інша на деякій відстані – у точці перерізу η'_m (рис. 3, б).

На основі принципу суперпозиції із використанням (20) для навантаження на рис. 3, б можемо записати:

$$q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) = F_{\xi} \frac{\Delta(\eta - \eta_M)}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}} - F_{\xi} \frac{\Delta(\eta - \eta'_M)}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_M', \xi=\xi_2}}. \quad (21)$$

Вимагатимемо, щоб момент пари сил був рівним інтенсивності зосередженого моменту M незалежно від довжини плеча $\Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}$:

$$M = F_{\xi} \Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}. \quad (22)$$

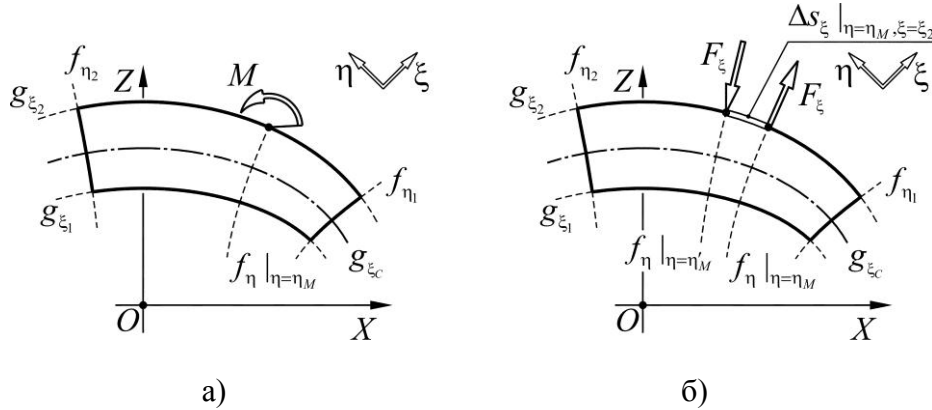


Рис. 3. Моделювання зосередженого моменту

З урахуванням (22) співвідношення (21) можна переписати так:

$$q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}} \frac{\Delta(\eta - \eta_M) - \Delta(\eta - \eta'_M)}{\Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}}. \quad (23)$$

Межа (23) при $\eta'_M \rightarrow \eta_M$ дає співвідношення для моделювання зосередженого моменту:

$$\begin{aligned} q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) &= \lim_{\eta'_M \rightarrow \eta_M} q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) = \lim_{\Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2} \rightarrow 0} q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) = \\ &= \frac{M}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}} \lim_{\Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2} \rightarrow 0} \frac{\Delta(\eta - \eta_M) - \Delta(\eta - \eta'_M)}{\Delta s_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}} = \frac{M}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{ds_{\xi}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2}}. \end{aligned}$$

З урахуванням (3) попереднє співвідношення запишеться так:

$$q_{\xi}^{\Pi_2}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{(L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_2})^2} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{d\eta}. \quad (24)$$

Результати дослідження. Отримані співвідношення (20) і (24), які пов'язують ідеалізовані зосереджені силу та момент із еквівалентним розподіленням навантаженням криволінійного бруса, стосуються тільки поздовжньої поверхні Π_2 . Однак застосувавши аналогічні підходи можна отримати ряд узагальнених співвідношень для інших поверхонь бруса.

Так для зосередженої нормальної сили F_{ξ} , що прикладена до нижньої (Π_1) або верхньої (Π_2) поздовжніх поверхонь криволінійного бруса, на основі (20) можна записати:

$$q_{\xi}^{\Pi_{\zeta}}(\eta, \eta_F) = F_{\xi} \frac{\Delta(\eta - \eta_F)}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_{\zeta}}}, \quad \zeta = 1, 2. \quad (25)$$

По аналогії з (25) для випадку зосередженої дотичної сили F_{η} прикладеної до поздовжньої поверхні отримані співвідношення:

$$q_{\eta}^{\Pi_{\zeta}}(\eta, \eta_F) = F_{\eta} \frac{\Delta(\eta - \eta_F)}{L_{\eta}|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_{\zeta}}}, \quad \zeta = 1, 2. \quad (26)$$

Аналогічно можна довести, що зосереджена нормальна F_{η} або дотична F_{ξ} сила, прикладена до торця T_{ζ} ($\zeta = 1, 2$) у точці із координатою $\xi = \xi_F$, моделюється співвідношеннями:

$$q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_F) = F_{\eta} \frac{\Delta(\xi - \xi_F)}{L_{\xi}|_{\eta=\eta_{\varsigma}, \xi=\xi_F}}, \quad q_{\xi}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_F) = F_{\xi} \frac{\Delta(\xi - \xi_F)}{L_{\xi}|_{\eta=\eta_{\varsigma}, \xi=\xi_F}}, \quad \varsigma = 1, 2. \quad (27)$$

Зосереджений момент M , прикладений у точці нижньої (Π_1) або верхньої (Π_2) поздовжньої поверхні криволінійного бруса, на основі (24) можна моделювати співвідношенням:

$$q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{(L_{\eta}|_{\eta=\eta_M, \xi=\xi_{\varsigma}})^2} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{d\eta}, \quad \varsigma = 1, 2. \quad (28)$$

У випадку коли зосереджений момент M , прикладений до торця T_{ς} у точці з координатою $\xi = \xi_M$, еквівалентне розподілене навантаження:

$$q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_M) = \frac{M}{(L_{\xi}|_{\eta=\eta_{\varsigma}, \xi=\xi_M})^2} \frac{d\Delta(\xi - \xi_M)}{d\xi}, \quad \varsigma = 1, 2. \quad (29)$$

Співвідношення (25)-(29) носять загальний характер і є інваріантними по відношенню до типу криволінійної системи координат, однак, за необхідності вони можуть бути конкретизовані для криволінійного бруса певної форми. Наприклад у випадку прямого бруса для прямокутної системи координат: $L_{\eta} = L_{\xi} = 1$, і співвідношення (25)-(29) набувають відомого вигляду [11].

У випадку кругового бруса у природній круговій циліндричній системі координат: $L_{\xi} = 1$, $L_{\eta} = |\xi|$. Тоді співвідношення (25) і (28), набудуть вигляду співвідношень, що застосовані у [19]:

$$q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_F) = \frac{F_{\xi}}{\xi_{\varsigma}} \Delta(\eta - \eta_F), \quad q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{(\xi_{\varsigma})^2} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{d\eta}, \quad \varsigma = 1, 2,$$

де ξ_{ς} – радіус кривизни поздовжніх поверхонь Π_{ς} .

Для сил та моментів на торцях кругового бруса, згідно (26) та (29) матимемо:

$$q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_F) = F_{\eta} \Delta(\xi - \xi_F), \quad q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_M) = M \frac{d\Delta(\xi - \xi_M)}{d\xi}, \quad \varsigma = 1, 2.$$

У випадку еліптичного бруса для природної еліптичної системи координат [23]: $L_{\xi} = L_{\eta} = a\sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$. Тоді співвідношення (25), (28), (26) та (29) перетворяться так:

$$q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_F) = \frac{F_{\xi} \Delta(\eta - \eta_F)}{a\sqrt{\text{sh}^2 \xi_{\varsigma} + \sin^2 \eta_F}}, \quad q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{a^2(\text{sh}^2 \xi_{\varsigma} + \sin^2 \eta_F)} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{d\eta}, \quad \varsigma = 1, 2,$$

$$q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_F) = \frac{F_{\eta} \Delta(\xi - \xi_F)}{a\sqrt{\text{sh}^2 \xi_F + \sin^2 \eta_{\varsigma}}}, \quad q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_M) = \frac{M}{a^2(\text{sh}^2 \xi_F + \sin^2 \eta_{\varsigma})} \frac{d\Delta(\xi - \xi_M)}{d\xi}, \quad \varsigma = 1, 2.$$

У випадку параболічного бруса для природної параболічної системи координат [22]: $L_{\eta} = L_{\xi} = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$. В такому випадку співвідношення (25), (28), (26) та (29) набудуть вигляду:

$$q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_F) = \frac{F_{\xi}}{\sqrt{\eta_F^2 + \xi_{\varsigma}^2}} \Delta(\eta - \eta_F), \quad q_{\xi}^{\Pi_{\varsigma}}(\eta, \eta_M) = \frac{M}{\eta_M^2 + \xi_{\varsigma}^2} \frac{d\Delta(\eta - \eta_M)}{d\eta}, \quad \varsigma = 1, 2,$$

$$q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_F) = \frac{F_{\eta}}{\sqrt{\eta_{\varsigma}^2 + \xi_F^2}} \Delta(\xi - \xi_F), \quad q_{\eta}^{T_{\varsigma}}(\xi, \xi_M) = \frac{M}{\eta_{\varsigma}^2 + \xi_F^2} \frac{d\Delta(\xi - \xi_M)}{d\xi}, \quad \varsigma = 1, 2.$$

Співвідношення (25)-(29) моделюють розподіл зосереджених навантажень тільки вздовж кривих $g_{\xi_{\varsigma}}$ і $f_{\eta_{\varsigma}}$, що належать відповідно поверхням Π_{ς} і T_{ς} . Однак на їх основі можна отримати співвідношення для просторового розподілу зосереджених навантажень. Так у випадку, коли навантаження рівномірно розподілене частині контуру окремого поперечного перерізу, яка належить поздовжній поверхні Π_{ς} , співвідношення, що описують їх просторо-

вий розподіл будуть аналогічні (25)-(29).

Якщо навантаження зосереджене у точці поверхні, співвідношення для його моделювання можна отримати на основі (25)-(29), розкривши розподіл навантаження по ширині відповідної поверхні. Так для нормальної сили інтенсивністю F_ξ , зосередженої у точці із координатами (η_F, ξ_2, y_F) представимо шуканий просторовий розподіл поверхневого навантаження $p_\xi^{\Pi_2}(\eta, \eta_F, y, y_F)$ у вигляді: $p_\xi^{\Pi_2}(\eta, \eta_F, y, y_F) = q_\xi^{\Pi_2}(\eta, \eta_F) p_y(y - y_F, \varepsilon)$, де функція $p_y(y - y_F, \varepsilon)$ володіє властивостями, аналогічними функції $p(\eta - \eta_F, \varepsilon)$ ((8), (9)). Подібно до (6)-(20), можна показати, що $p_y(y - y_F, \varepsilon)$ у граничному випадку є зміщеною функцією Дірака: $p_y(y - y_F, 0) = \Delta(y - y_F)$. Відповідно, із урахуванням (25) для просторового розподілу $p_\xi^{\Pi_2}$ зосередженої у точці поздовжньої поверхні сили матимемо наступне співвідношення:

$$p_\xi^{\Pi_2}(\eta, \eta_F, y, y_F) = \frac{F_\xi}{L_\eta|_{\eta=\eta_F, \xi=\xi_2}} \Delta(\eta - \eta_F) \Delta(y - y_F).$$

Аналогічно можна аналітично моделювати просторовий розподіл інших типів зосереджених навантажень.

Висновки. Таким чином, виконане математичне обґрунтування зв'язку між ідеалізованими зосередженими навантаженнями (сила, момент), прикладеними до поздовжніх і торцевих поверхонь криволінійного бруса, і еквівалентними розподіленими навантаженнями та отримано загальні залежності між ними. Співвідношення отримані у природній для будови бруса криволінійній циліндричній системі координат і є інваріантними по відношенню до типу системи координат. Отримані теоретичні залежності разом із співвідношеннями для визначення внутрішніх силових факторів та рівняннями теорії пружності, побудованими у попередніх роботах, можуть бути використані у ході розв'язання широкого кола теоретичних і прикладних задач пружного деформування криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми.

Література

1. Kanwal R.P. Generalized Functions Theory and Applications / R.P. Kanwal. – Birkhäuser Basel, 2004. – 476 p.
2. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. – М.: «Мир», 1978. – 518 с.
3. Macaulay W.H. Note on the deflection of the beams / W.H. Macaulay // Messenger of Mathematics, 1919. – 48. – pp. 129-130.
4. Urry S.A. The use of Macauley's brackets in the analysis of laterally loaded struts and tie-bars / S.A. Urry // AIAA Journal. – 1963. – Vol. 1, No. 2. – pp. 462-463.
5. Weissenburger J.T. Integration of discontinuous expressions arising in beam theory / J.T. Weissenburger // AIAA Journal, 1964. – Vol. 2, No. 1. – pp. 106-108.
6. Wittrick W.H. A generalization of macaulay's method with applications in structural mechanics / W.H. Wittrick // AIAA Journal, 1965. – Vol. 3, No. 2. – pp. 326-330.
7. Bahar L.Y. An extension of hetenyi's method through the use of Macaulay brackets / L.Y. Bahar // AIAA Journal, 1965. – Vol. 3, No. 2. – pp. 369-370.
8. Brungraber R.J. Singularity functions in the solution of beam-deflection problems / R.J. Brungraber // Journal of Engineering Education (Mechanics Division Bulletin), 1965. – 1.55 (9). – pp. 278-280.
9. Yavaria A. On applications of generalized functions to beam bending problems / A. Yavaria, S. Sarkania, E. Thomas Moyer Jr // International Journal of Solids and Structures, 2000. – Vol. 37, Iss. 40. – pp. 5675-5705.
10. Yavari A. On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities / A. Yavari, S. Sarkani // International Journal of Mechanical Sciences, 2001. – Vol. 43, Iss. 6. – pp. 1543-1562.

11. Falsone G. The Use of Generalised Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations / G. Falsone // *Int. J. Engng Ed*, 2002. – Vol. 18, No. 3. – pp. 337-343.
12. Biondi B. Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities / B. Biondi, S. Caddemi // *International Journal of Solids and Structures*, 2005. – Vol. 42, Iss. 9-10. – pp. 3027-3044.
13. Stephen N.G. Macaulay's Method for a Timoshenko Beam / N.G. Stephen // *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 2007. – Vol. 35, Iss. 4. – pp. 285-292.
14. Falsone G. The use of generalized functions modeling the concentrated loads on Timoshenko beams / G. Falsone // *Structural Engineering & Mechanics*, 2018. – 67(4). – pp. 385-390.
15. Горик О.В. Згин композитних призматичних брусів в умовах обмеженого деформування / О.В. Горик, С.Б. Ковальчук // *Міжвуз. зб. Наукові нотатки*. – Луцьк: ЛНТУ, 2013. – Вип. 42. – С. 55-61.
16. Palmeri A. Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler-Bernoulli and Timoshenko beams / A. Palmeri, A. Cicirello // *International Journal of Solids and Structures*, 2011. – Vol. 48, Iss. 14-15. – pp. 2184-2195.
17. Caddemi S. Closed-form solutions for stepped Timoshenko beams with internal singularities and along-axis external supports / S. Caddemi, I. Calì, F. Cannizzaro // *Archive of Applied Mechanics*, 2013. – Vol. 83, Iss. 4. – pp. 559-577.
18. Chalishajar D. On Applications of Generalized Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations / D. Chalishajar, A. States, B. Lipscomb // *Applied Mathematics*, 2016. – 7. – pp. 1943-1970.
19. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов: в 2-х томах / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. – Одесса: БМВ, 2010. – 415 с.
20. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
21. Ковальчук С.Б. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. – Одеса: ОДАБА, 2017. – Вип. 68. – С. 31-38.
22. Ковальчук С.Б. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // *Міжвуз. зб. Наукові нотатки*. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. – Вип. 63 – С.89-97.
23. Ковальчук С.Б. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. – Одеса: ОДАБА, 2018. – Вип. 70. – С.40-48.

References

1. Kanwal R.P. Generalized Functions Theory and Applications. Birkhäuser Basel, 2004.
2. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobschennyih funktsiy s prilozhenimi v tehnikе. Moskva: Mir, 1978.
3. Macaulay W.H. Note on the deflection of the beams, *Messenger of Mathematics*, 48, pp. 129-130, 1919.
4. Urry S.A. The use of Macauley's brackets in the analysis of laterally loaded struts and tie-bars. *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 2, pp. 462-463, 1963.
5. Weissenburger J.T. Integration of discontinuous expressions arising in beam theory. *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 1, pp. 106-108, 1964.
6. Wittrick W.H. A generalization of macaulay's method with applications in structural mechanics. *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 326-330, 1965.
7. Bahar L.Y. An extension of hetenyi's method through the use of Macaulay brackets. *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 369-370, 1965.
8. Brungraber R.J. Singularity functions in the solution of beam-deflection problems. *Journal of Engineering Education (Mechanics Division Bulletin)*, 1.55(9), pp. 278-280, 1965.
9. Yavaria A., Sarkania S., Moyer E.T. On applications of generalized functions to beam bending

problems. International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, Iss. 40, pp. 5675-5705, 2000.

10. Yavari A., Sarkani S. On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, Iss. 6, pp. 1543-1562, 2001.

11. Falsone G. The Use of Generalised Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations. Int. J. Engng Ed, Vol. 18, No. 3, pp. 337-343, 2002.

12. Biondi B., Caddemi S. Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities. International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, Iss. 9-10, pp. 3027-3044, 2005.

13. Stephen N.G. Macaulay's Method for a Timoshenko Beam. International Journal of Mechanical Engineering Education, Vol. 35, Iss. 4, pp. 285-292, 2007.

14. Falsone G. The use of generalized functions modeling the concentrated loads on Timoshenko beams. Structural Engineering & Mechanics, 67(4), pp. 385-390, 2018.

15. Goryk O.V., Koval'chuk S.B. Zghyn kompozytnykh pryzmatychnykh brusiv v umovakh obmezhеноho deformuvannia. Mizhvuz. zb. Naukovi notatky, Lutsk: LNTU, Vol. 42, pp. 55-61, 2013.

16. Palmeri A., Cicirello A. Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. International Journal of Solids and Structures, Vol. 48, Iss. 14-15, pp. 2184-2195, 2011.

17. Caddemi S., Calio I., Cannizzaro F. Closed-form solutions for stepped Timoshenko beams with internal singularities and along-axis external supports. Archive of Applied Mechanics, Vol. 83, Iss. 4, pp. 559-577, 2013.

18. Chalishajar D., States A., Lipscomb B. On Applications of Generalized Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations. Applied Mathematics, 7, pp. 1943-1970, 2016.

19. Daschenko A.F., Kolomiets L.V., Orobey V.F., Suryaninov N.G. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov: v 2-h tomah. Odessa: VMV, 2010.

20. Benerdzhi P., Batterfield R. Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh; transl. from eng. Moskva: Mir, 1984.

21. Koval'chuk S.B., Goryk O.V. Pryrodna kryvoliniina tsylindrychna systema koordynat dlia sterzhniv iz ploskoii vissiu dovilnoi formy. Visnyk ODABA, Odesa: ODABA, Vol. 68, pp. 31-38, 2017.

22. Koval'chuk S.B., Goryk O.V. Rivniannia teorii pruzhnosti dlia kompozytnykh brusiv iz ploskoii vissiu dovilnoi formy u pryrodni kryvoliniinii systemi koordynat. Mizhvuz. zb. Naukovi notatky, Lutsk: LNTU, Vol. 63, pp. 89-97, 2018.

23. Koval'chuk S.B., Goryk O.V. Intehrlni ta dyferentsialni spivvidnoshennia dlia vnutrishnikh sylovykh faktoriv pry zghyni brusa z kryvoliniinoiu ploskoii vissiu dovilnoi formy. Visnyk ODABA, Odesa: ODABA, Vol. 70, pp. 40-48, 2018.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НАГРУЗОК БРУСЬЕВ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ОСЬЮ Часть 1. Моделирование сосредоточенных нагрузок

Ковальчук С.Б., к.т.н.,

stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4550-431X

Горик А.В., д.т.н., профессор,

Полтавская государственная аграрная академия
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580

Аннотация. В прикладной механике распространенными видами нагрузки являются сосредоточенная сила, момент, а также локализованная на некотором участке бруса распределенная нагрузка. Эффективным подходом к аналитическому моделированию таких нагрузок является использование обобщенных функций, с помощью которых можно избежать рассмотрения множества расчетных участков балки, в пределах которых нагрузка является непрерывной функцией. Однако в известных научных работах данный подход развит только для прямолинейных стержней и частично для круговых. Настоящая работа посвящена проблеме моделиро-

вания сосредоточенных (сила, момент) и локализованных на участке поверхности нагрузок, для брусьев с криволинейной плоской осью произвольной формы в естественной системе координат. В первой части освещено математическое обоснование аналитического моделирования сил и моментов, сосредоточенных в точке продольной цилиндрической или торцевой поверхности криволинейного бруса в естественной криволинейной системе координат. Путем предельного перехода от статически эквивалентной локализованной нагрузки к граничному случаю нагрузки сосредоточенной в точке поверхности бруса, с использованием элементов теории обобщенных функций получены общие аналитические соотношения для моделирования сосредоточенной силы. На основе полученного соотношения, путем предельного перехода для пары сосредоточенных сил при стремлении плеча пары к нулю, построено математическое обоснование аналитического моделирования сосредоточенного момента. Полученные соотношения носят общий характер и являются инвариантными по отношению рассматриваемой системы координат. На их основе получено ряд соотношений для моделирования сосредоточенных нагрузок в отдельных случаях кругового, эллиптического и параболического брусьев в естественных системах координат. Полученные результаты могут быть использованы при решении широкого круга прикладных задач деформирования криволинейных брусьев.

Ключевые слова: криволинейный брус, сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, естественная система координат, обобщенная функция.

ANALYTICAL MODELING OF CONCENTRATED AND LOCALIZED LOADS OF BARS WITH A CURVILINEAR PLAIN AXIS

Part I. Modeling of concentrated load

Kovalchuk S., PhD.,

stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4550-431X

Goryk O., Doctor of Engineering, Professor,

Poltava state agrarian academy

oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580

Abstract. In applied mechanics, the common types of load are concentrated force, moment, and also distributed load localized in a certain part of the bar. An effective approach to the analytical modeling of such loads is the use of generalized functions, with the help of which it is possible to avoid considering variety of gage sections of the bar, within which the load is a continuous function. However, in well-known scientific papers, this approach is developed only for rectilinear bars and partially for circular ones. This paper is devoted to the problem of modeling of concentrated (force, moment) and localized loads for bars with a curvilinear plain axis of an arbitrary shape in the natural coordinate system. The first part of the work deals with the mathematical background of analytical modeling of forces and moments concentrated at a point of a longitudinal cylindrical or end surface of a curvilinear bar in the natural curvilinear coordinate system. General analytical relations for modeling of concentrated force on longitudinal surfaces and ends of a curvilinear bar were obtained by limiting transition from a statically equivalent localized load to the boundary case of the load concentrated at a point using the elements of the theory of generalized functions. The mathematical background of the analytical modeling of concentrated moment has been developed on the basis of the relation for modeling of normal force by limiting transition for a couple of concentrated forces as the arm of couple tends to zero. The obtained relations are of a general nature and invariant to the coordinate system under consideration. Based on them, a number of relations have been obtained for modeling of concentrated loads in individual cases of circular, elliptical and parabolic bars in natural coordinate systems. The obtained results can be used to solve a wide range of applied problems of deformation of curvilinear bars.

Keywords: curvilinear bar, concentrated force, concentrated moment, local load, natural coordinate system.

Стаття надійшла 29.10.2018